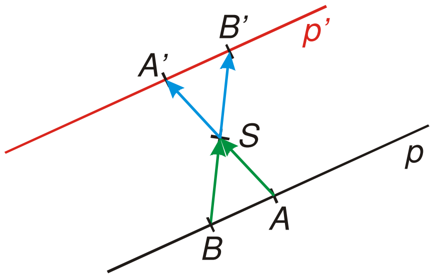
## 7.3.17 Další metrické úlohy I

**Předpoklady:** 070315, 070316

**Pedagogická poznámka:** Za normálních okolností není příliš pravděpodobné, že by většina studentů byla schopna přijít samostatně na řešení většiny úloh (jsou značně rozdílné a velká část z nich vyžaduje nápad). Používám proto trošku jinou strategii. Na začátku hodiny si projdeme všechny příklady a společně navrhneme řešení. Nejsme úplně konkrétní (většinou si říkáme body, které jsou v jednotlivých příkladech uvedeny tučně). Studenti si při tom udělají poznámky (přibližně tučný text v řešení úloh bez rovnic) a poté řeší úlohy samostatně. Já běhám mezi nimi a pomáhám v místech, kde si nejsou jistí.

**Př. 1:** Je dána přímka $p: 2x - y + 1 = 0$. Najdi přímku, která je s přímkou $p$ středově souměrná podle středu $S[-2;1]$.

Přímku můžeme najít pomocí dvou bodů. Pro každý bod v rovině platí: $X' = S + (S - X) \Rightarrow$ **najdeme na přímce *p* dva body, zobrazíme je a s jejich pomocí najdeme rovnici přímky** $p'$.




Hledáme body na přímce *p*:

- $A[0;?] \Rightarrow 2 \cdot 0 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A[0;1]$,
- $B[1;?] \Rightarrow 2 \cdot 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[1;3]$.

Najdeme obrazy určených bodů:

- $A' = S + (S - A) = [-2;1] + (-2;0) = [-4;1]$,
- $B' = S + (S - B) = [-2;1] + (-3;-2) = [-5;-1]$.

Určíme rovnici přímky $A'B'$: $(B' - A') = (-1;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (2;-1)$.

Rovnice: $2x - y + c = 0 \Rightarrow$ dosadíme bod $A'$: $2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 9$.

Rovnice přímky $A'B'$: $2x - y + 9 = 0$ .

**Dodatek:** Mohli bychom také spočítat souřadnice pouze jednoho bodu a udělat obraz přímky jako rovnoběžku procházející tímto bodem.

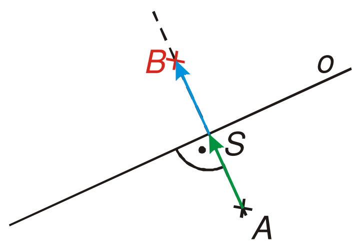
**Pedagogická poznámka:** Při řešení se vyskytují dva problémy:
tradičně místo, kde je více možností – zvolení bodů na přímce *p*,
při výpočtu používají studenti vektor $(S - A)$, pokud ho počítají zvlášť, získají vektor $(-2;0)$, který mají tendenci krátit na tvar $(1;0)$. Většinou stačí, aby si

nakreslili obrázek s oběma vektory a ujasnili si, zda potřebují z vektoru pouze směr (jako při sestavování rovnic přímek) nebo i velikost a orientaci.

**Př. 2:** Najdi obraz $B$ bodu $A[4;-4]$ v osové souměrnosti podle osy $o: x-3y+4=0$.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.
**Řešení napodobením geometrické konstrukce**

1. Narýsujeme kolmici $p$ na přímku $o$ procházející bodem $A$.
2. Najdeme průsečík $S$ přímky $p$ s osou $o$.
3. Na přímce $p$ sestrojíme bod $B$ tak, aby bod $S$ byl středem úsečky $AB$.




**1. Kolmice *p* na přímku *o* procházející bodem *A***

$\boldsymbol{n}_o = \boldsymbol{u}_p = (1;-3) \Rightarrow$ přímka $p$: $\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = -4-3t; t \in R \end{array}$

**2. Průsečík *S* přímky *p* s osou** $o: x-3y+4=0$

Přímka $p$: $\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = -4-3t; t \in R \end{array}$.

Spočteme průsečík dosazením do rovnice pro osu $o$.

$(4+t)-3(-4-3t)+4=0$

$4+t+12+9t+4=0$

$10t=-20$

$t=-2$

Dopočteme souřadnice průsečíku $S$: $\begin{array}{l} x = 4+t = 4-2 = 2 \\ y = -4-3t = -4-3(-2) = 2 \end{array} \Rightarrow S[2;2]$.

**3. Na přímce *p* sestrojíme bod *B* tak, aby bod *S* byl středem úsečky *AB*.**

Platí: $B = S + (S-A)$ $\qquad$ $S-A = (-2;6)$

$B = S+(S-A) = [2;2]+(-2;6) = [0;8]$

Obrazem bodu $A$ v osové souměrnosti s osou $o$ je bod $B=[0;8]$.

**Řešení zapsáním podmínek, které musí splňovat souřadnice hledaného bodu *B*.**

Hledaný bod $B[b_1;b_2] \Rightarrow$ musíme najít dvě podmínky na sestavení dvou rovnic.

**1. podmínka: Střed úsečky** $AB$ **leží na ose** $o: x-3y+4=0$.

Střed úsečky $AB$ $A[4;-4]$, $B[b_1;b_2]$: $S\left[\frac{4+b_1}{2};\frac{-4+b_2}{2}\right]$.

Dosadíme do rovnice osy $o$: $\left(\frac{4+b_1}{2}\right)-3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right)+4=0$.

**2. podmínka: Vektor *AB* je kolmý na osu *o*.**

$B-A=(b_1-4;b_2+4)$ $\qquad$ $\boldsymbol{n}_o=(1;-3) \Rightarrow \boldsymbol{u}_o=(3;1)$

$\boldsymbol{u}_o(B-A)=0 \Rightarrow (3;1)(b_1-4;b_2+4)=3(b_1-4)+1(b_2+4)=0$

Zjednodušíme obě rovnice:

$\left(\frac{4+b_1}{2}\right)-3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right)+4=0 \quad /\cdot 2$

$(4+b_1)-3(-4+b_2)+8=0$

$4+b_1+12-3b_2+8=0$

$b_1-3b_2=-24$

$3(b_1-4)+1(b_2+4)=0$

$3b_1-12+b_2+4=0$

$3b_1+b_2=8$

Vyřešíme soustavu dosazovací metodou: $b_1-3b_2=-24 \Rightarrow b_1=3b_2-24$.

$3(3b_2-24)+b_2=8$

$9b_2-72+b_2=8$

$10b_2=80$

$b_2=8$

$b_1=3b_2-24=3\cdot 8-24=0$

Obrazem bodu $A$ v osové souměrnosti s osou $o$ je bod $B=[0;8]$.

**Pedagogická poznámka:** Občas si studenti stěžují, že je zbytečné počítat jeden příklad dvěma způsoby. Pokud by nám šlo o výsledek, pak mají určitě pravdu. Naším cílem je ale nácvik toho, jak se můžeme postavit k různým problémům. Pak mají oba způsoby své oprávnění.

**Př. 3:** Na přímce $p: 3x-4y-2=0$ najdi body, jejichž vzdálenost od bodu $S[2;1]$ je 5.

Hledané body jsou body, které leží na přímce $3x-4y-2=0$ a zároveň na kružnici $k(S;5)$ $\Rightarrow$ úloha bude mít žádné, jedno nebo dvě řešení (možnosti pro průsečíky přímky s kružnicí).
Hledáme bod $X[x;y]$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice:

- **Bod $X[x;y]$ leží na přímce $p$:** $3x-4y-2=0$**.**
- **Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od bodu $S[2;1]$ je pět:** $|SX|=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2}=5$.

Dosadíme a upravíme druhou rovnici:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=5 \quad /^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2=25$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=25$

$x^2-4x+y^2-2y=20$

Řešíme soustavu: $\begin{array}{c} 3x-4y-2=0 \\ x^2-4x+y^2-2y=20 \end{array}$ $\Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé:

$3x-4y-2=0 \Rightarrow x=\frac{4y+2}{3}$.

$\left(\frac{4y+2}{3}\right)^2-4\left(\frac{4y+2}{3}\right)+y^2-2y=20 \quad /\cdot 9$

$16y^2+16y+4-48y-24+9y^2-18y=180$

$25y^2-50y-200=0$

$y^2-2y-8=0$

$(y-4)(y+2)=0$

$y_1=4 \Rightarrow x_1=\frac{4y_1+2}{3}=\frac{4\cdot 4+2}{3}=6 \Rightarrow X_1[6;4]$

$y_2=-2 \Rightarrow x_2=\frac{4y_2+2}{3}=\frac{4\cdot(-2)+2}{3}=-2 \Rightarrow X_2[-2;-2]$

**Př. 4:** Najdi bod tak, aby byl trojúhelník *ABC* pravoúhlý s přeponou *AB*, kde $A[-3;2], B[7;-3]$, a aby platilo $|AC|=5$.

Hledáme bod $C[x;y]$ tak, aby byly splněny dvě podmínky (zapíšeme je rovnicemi).

**1. Úhel $ACB$ je pravoúhlý**

$\Rightarrow$ Vektory $C-A$ a $C-B$ jsou kolmé $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový.

$C-A=(x+3;y-2)$ $\qquad$ $C-B=(x-7;y+3)$

$(C-A)\cdot(C-B)=(x+3;y-2)(x-7;y+3)=0$

$x^2-7x+3x-21+y^2+3y-2y-6=0$

$x^2+y^2-4x+y-27=0$

**2. strana $AC$ má délku 5**

$|AC|=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=5$

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$

$x^2+6x+9+y^2-4y+4-25=0$

$x^2+y^2+6x-4y-12=0$

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{l} x^2+y^2-4x+y-27=0 \\ x^2+y^2+6x-4y-12=0 \end{array}$.

$$\begin{array}{ll} & x^2+y^2-4x+y-27=0 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & -10x+5y-15=0 \quad /:5 \end{array} \Rightarrow -2x+y=3 \Rightarrow y=2x+3$$

Dosadíme do první rovnice: $\left(\frac{15-5y}{2}\right)^2+y^2-4\cdot\frac{15-5y}{2}+y-27=0$.

$x^2+(2x+3)^2-4x+(2x+3)-27=0$

$x^2+4x^2+12x+9-4x+2x+3-27=0$

$5x^2+10x-15=0 \quad /:5$

$x^2+2x-3=0$

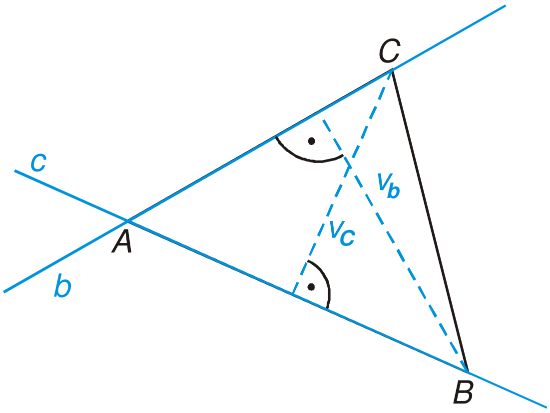
$(x+3)(x-1)=0$

$x_1=-3 \Rightarrow y=2x+3=2(-3)+3=-3 \Rightarrow C[-3;-3]$

$x_2=1 \Rightarrow y=2x+3=2\cdot 1+3=5 \Rightarrow C[1;5]$

**Př. 5:** Najdi vrcholy trojúhelníka $ABC$, pokud známe: obecné rovnice dvou stran $b: x-2y+7=0$ a $c: x+y+1=0$ a velikosti výšek $v_b = \frac{21\sqrt{5}}{5}$, $v_c = 3\sqrt{2}$.

Nakreslíme si obrázek.




Bod $A$ najdeme jako průsečík přímek $b$ a $c$.
Bod $B$ najdeme jako bod, který:

- leží na přímce $c$,
- je od přímky $b$ vzdálený $v_b$.

Bod $C$ najdeme jako bod, který:

- leží na přímce $b$,
- je od přímky $c$ vzdálený $v_c$.

**Hledání bodu $A$ jako průsečíku přímek $b$ a $c$**

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{r} x-2y+7=0 \\ x+y+1=0 \end{array}$.

$[\![2]\!]-[\![1]\!] \qquad 3y-6=0 \Rightarrow y=2$

Dopočteme: $x+2+1=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow A[-3;2]$.

**Určujeme bod $B[b_1;b_2]$.**

Leží na přímce $c$: $b_1+b_2+1=0$.

Vzdálenost bodu $B[b_1;b_2]$ od přímky $b$ se rovná $\frac{21\sqrt{5}}{5}$: $\frac{|b_1-2b_2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $b_1+b_2+1=0 \Rightarrow b_1=-1-b_2$.

$\frac{|-1-b_2-2b_2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5} \quad / \cdot 5$

$\sqrt{5}|6-3b_2| = 21\sqrt{5} \quad / : \sqrt{5}$

$3|2-b_2| = 21 \quad / : 3 \qquad$ (použijeme $|2-b_2| = |b_2-2|$

$|b_2-2| = 7 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 7 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $b_2 = 9 \Rightarrow b_1 = -1-b_2 = -1-9 = -10 \Rightarrow B_1[-10;9]$
- $b_2 = -5 \Rightarrow b_1 = -1-b_2 = -1-(-5) = 4 \Rightarrow B_2[4;-5]$

**Určujeme bod $C[c_1;c_2]$.**

Leží na přímce $b$: $c_1-2c_2+7=0$.

Vzdálenost bodu $C[c_1;c_2]$ od přímky $c$ se rovná $3\sqrt{2}$: $\frac{|c_1+c_2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $c_1-2c_2+7=0 \Rightarrow c_1 = 2c_2-7$.

$\frac{|2c_2-7+c_2+1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{2}$

$|3c_2-6| = 6$

$3|c_2-2|=6 \quad /:3$ (použijeme $|2-b_2|=|b_2-2|$

$|c_2-2|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 2 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $c_2=4 \Rightarrow c_1=2c_2-7=2\cdot 4-7=1 \Rightarrow C_1[1;4]$
- $c_2=0 \Rightarrow c_1=2c_2-7=2\cdot 0-7=-7 \Rightarrow C_2[-7;0]$

Podmínky zadání splňují všechny trojúhelníky *ABC*, které získáme kombinací vrcholů $A[-3;2]$, $B_1[-10;9]$, $B_2[4;-5]$, $C_1[1;4]$, $C_2[-7;0]$. Příklad má tedy $1\cdot 2\cdot 2=4$ řešení.

**Pedagogická poznámka:** Označení $B[b_1;b_2]$ používám místo $B[b_x;b_y]$ schválně. U slabších studentů pomáhá k vytváření chaosu v závěru příkladu, kde se objevují dvě řešení. Cílem je opět to, aby se orientovali v příkladu a uvědomili si, že index $b_1$ znamená *x*-vou souřadnici a ne první ze dvou řešení.

**Př. 6:** Petáková:
strana 111 cvičení 91
strana 111 cvičení 92
strana 111 cvičení 96
strana 111 cvičení 99

**Shrnutí:**